数理解析研究所講究録
148巻 1972年 62-72

Compactification の Remainder の次元について

東京教育大　保科 隆雄

空間は断らない限り Completely regular T_1 位相空間とする。

§1. 序

位相空間 X の T_2*) compactification cX において、その Remainder $cX-X$ の次元を考察する問題は、Freudenthal [1] の1942年の結果から始まり、最近の Smirnov [10], Lelek [8] 等まで、数多く論じられているが、依然として本質的な問題は未解決なまゝである。例えば、これらの論点で扱われている空間の多くは可分距離空間であることなど、比較的容易に眼に付く条件の狭さ等は、未だにそのまゝであったり、全体的に、手の下しようがない難解な問題が昔から現在に至るまで山積しているといった感じである。

§2 以下では、いままで知られている結果を述べると同時に、未解決の問題について述べることとする。

*) compactification は全て、少なくとも T_2 とする。

§2　$\dim(cX-X)$ について．

序で述べたように，この種の問題の発端となった最初の結果は，Freudenthal [1] により与えられた。以下 dim は covering dimension を表わす。

定理1（Freudenthal [1]）

「separable metric space X に対し，X の metric compactification γX で

$$\dim(\gamma X - X) \leqq 0$$

となるものが存在する必要十分条件は，X が semi-compact であること。」

ここで，空間 X が semi-compact であるとは，X の各点が boundary が compact な neighborhood の base を持つ空間のことを言う（Zippin [11]）。

この定理から自然，0次元から n 次元へ発展させることの考察が生じるが，その前に，まず0次元の場合について，より一般的な考察が試みられた。

次の結果は，本質的に uniformity の立場からとらえられたもので，後に述べる Smirnov [10] の結果と比較すると興味深い。これらは次の基本事項に依存している。

定理2（Freudenthal [2]，Morita [5]）

「X を semi-compact，T_2-空間とすると，X は Completely regular となる。」

実際，この時Xは，boundaryがcompactになるopen subsetのfinite cover全体を考えると，Xの位相とcompatibleなuniformityが与えられ，uniformspaceとなる（注Morita [5]）。

このuniformityにより，自然次の結果が与えられる。

定理3（Freudenthal [2]，Morita [5]）

「semi-compact T_2－空間Xに対し，そのcompactification αXで，$\mathrm{ind}(\alpha X - X) \leqq 0$

となるものが存在する。」

ここで，indとはsmall inductive dimensionを表わす。

Skljarenko [9] は次の形で与えた。

定理4（Skljarenko [9]）

「Xがtype Cの空間とする時，Xのcompactification cXで$\dim(cX - X) \leqq 0$となるものが存在する必要十分条件は，Xがsemi-compactであること。」

ここで，Xがtype C^Lの空間であるとは，Xの任意compact subsetに対し，それを含むXのcompact subsetで，countable characterを持つものが存在する，ような空間を言う。　一般に，Lindelöf space Xでは，$\mathrm{ind} X \leqq 0$と$\dim X \leqq 0$は同値であり，更に，次の結果より上の定理3と4は関連が

明瞭となる。

定理5（Skljarenko[9]）

「X が type C' である必要十分条件は，X の任意の compactification cX に対し，$cX-X$ が Lindelöf となること。」

全ての距離空間は明らかに type C' の空間であり，また定理3の追加として，この場合 αX の weight と X の weight が同じとなることも得られている。従って，定理1について 0-次元の場合は全ど完全に分析されている。

それでは n 次元の場合，即ち X のある Compactification bX で $\dim(bX-X) \leqq n$ となるものが存在するための X の必要十分条件を求める問題についてはどうかというと，これは完全な形では未解決であるが，最近 Smirnov[10] が proximity の立場から興味ある結果を与えた。以下若干これについて述べることにする。一般に X の proximity と compactification とは1対1に対応する。従って，(X, c) を proximity space，c を proximity relation とする時，これに対応する compactification を cX と表わす。

定義1．(X, c) proximity space とする。

X の open subset の finite collection $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ が extendable bordering とは，$X-\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_k$ が compact で これを含む open set H をとると $\{H, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ は X の proximalcover

となること。

定義2. cX. X の compactification とする。

X が normally adjoined to $cX-X$ であるとは $cX-X$ における2つの disjoined closed set は cX の open set で分離できること。

定義1の条件は, $cX-X \subset$ 点$(cX-\overline{X-K_i}^{cX})$ となることと同値であり, 又定義2を満足する空間としては type C' の空間がある。

定理6 [Smirnov [10])

「X : normally adjoined to $cX-X$ とする。

$\dim(cX-X) \leqq n \iff X$ の extendable bordering は, order が $n+1$ を越えない extendable bordering で細分される。」

この結果は形式上 simple ではあるが, 前に述べた問題とは若干意味が異る。この問題に近い形としては次の結果が与えられている。

定理7 (Smirnov [10]) X が type C' の空間である時,

$\exists cX$. s.t. weight of cX = weight of X, $\dim(cX-X) \leqq n$

$\iff$ ${}^{\exists}\Sigma$: X の extendable bordering の family

s.t. ① ${}^{\forall}\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma$. $\exists \gamma \in \Sigma$. $\gamma \overset{*}{<} \gamma_1 \wedge \gamma_2$ ② ${}^{\forall}\gamma \in \Sigma$ order $\gamma \leqq n+1$

③ ${}^{\forall}x \in X$. ${}^{\forall}U_x$: nbd. of x $\exists \gamma \in \Sigma$. $\exists V_x$: nbd. of x s.t. $St_\gamma V_x \subset U_x$

以上について未解決な問題としては次が上げられる。

問題1. 定義2における normally adjoinedness について X の持つべき必要十分条件は何か?

問題2 (Skljarenko [9])

X が countable base $\mathcal{B}$ を持ち, 更に勝手に $U_1, \cdots, U_{n+1}$ を $\mathcal{B}$ からとると, $\bigcap_{i=1}^{n+1}(\overline{U}_i - U_i)$ が compact とする。 この時 X の metric compactification αX で $\dim(\alpha X - X) \leqq n$ となるものが存在するか?

問題1については, βX (Stone-Čech) についてわかれば十分である。

問題2については, 逆は成立することは全く自明である。なおこれは定理7と関連して興味深い。

§3 def X について

§2では一般の空間で論じた結果が中心であったが, ここでは, 空間は全て separable metric space の範囲に限定する。 限定してもなおかつ全然不明な問題が多くある。

まず次の2つの notation を与える。

1 $\operatorname{def} X = \min_c \dim(cX - X)$; cX: metric compactification

2 $\operatorname{cmp} X \leqq n$ とは

$\operatorname{cmp} X = -1 \Leftrightarrow X$: compact, 以下帰納的に $\operatorname{cmp} X \leqq n-1$ で

あることが定義できたとして，$\mathrm{cmp}\,X \leqq n$とは，Xの任意の点が任意に小さいnbd.でboundaryの$\mathrm{cmp} \leqq n-1$となるものを持つこと。

次元関数def（deficiency）及びcmp（compactness）は，Groot [3]，Groot and Nishiura [4] により与えられ，またその基本的性質もいくつか得られている。これらは，その定義と定理1から容易に察せられるように0次元の場合は次のように言い換えることができる。

定理8（Groot and Nishiura [4]）

「$\mathrm{def}\,X \leqq 0 \Leftrightarrow \mathrm{cmp}\,X \leqq 0 \Leftrightarrow X$ semi-compact」

事実，上のcmpはdefを計るために，Groot and Nishiura [4] が与えたもので，上のように0次元の場合は形式上成功はしているが，一般のn次元については全然といってよい程不明である。即ち次の問題は古くから肯定も否定も何の手掛かりも無い有名な問題である。

問題3　$\mathrm{cmp}\,X = \mathrm{def}\,X$?

deficiencyはそれ自身空間の内部的構造による描写が何も与えられていないにもかかわらず，他の次元との比較や，写像と次元に関する問題等に用いられている。以下にそれらについて述べることにする。

まず空間Xに対し，$\dim X$と$\mathrm{def}\,X$は常に比較が付き，

$\mathrm{def}\,X \leqq \dim X$ であることが容易に知られる。 これは、更に次の Lelek[8] により更に精密化される。

定理9 (Lelek[8])

「$P(X)$ を X の点で任意に小さい nbd. が boundary compact であるもの全体とする時、

$$\mathrm{def}\,X \leqq \dim \overline{X - P(X)}^{X} + 1$$ 」

この不等式では、右辺の1は省けない。 それは次の例で明らかである。 $I = [0,1]$ とする。

$X = \dot{I}^n \times \{0\} \cup (I^n \times \{\frac{1}{i} \mid i = 1, 2, \cdots\})$ とすると、

$\mathrm{def}\,X = n$, $\dim(X - P(X)) = n-1$,

これに類似した不等式は未だ他に見当らない。

$\mathrm{def}\,X < \dim X$ となる場合については次の空間が考えられている。

定義3 X が第1種の G_δ-space であるとは、ある compactification cX があって、 $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, G_i open in cX, $\dim(\overline{G_i}^c - G_i) < \dim X$ となること。 第1種でない時、第2種であるという。

例. ◦ P : irrational in $[0,1]$ とする時、 $P \times I^n$ は第2種。

◦ $I^n - (I-P)^n$ は I^n で第1種。

定理10 (Lelek[7])

X complete, $\dim X < \infty$ とする。

X が第1種の G_δ-space $\Leftrightarrow$ $\exists\, cX$, $\dim(cX - X) < \dim X$

Mapping と dimension に関して deficiency を用いて，Lelek[6] が次のような結果を与えている。

定理11（Lelek[6]）

「$f: X \longrightarrow Y$ continuous onto，かつ $f^{-1}y$ locally compact for $\forall y \in Y$ とする。この時

$$\dim X \leqq \dim Y + \max\{\dim f^{-1}y \text{ for } \forall y \in Y, \operatorname{def} X\}」$$

この結果より例えば，X が non-compact で各 quasi-component が locally compact，0次元なら $\dim X \leqq \operatorname{def} X$，いわゆる Nishiura[12] の結果が系として与えられる。

ここでは次の問題が open となっている。

「$\dim X \leqq \dim Y + \max\{\dim f^{-1}y \text{ for } \forall y \in Y, \operatorname{def} X\} + \text{loc.comf} + 1$」

ただし $f: X \to Y$ continuous onto とし，空間 S に対し，loc comp $S \leqq n$ とは，notation 2 において compact の代りに locally compact とした場合とする。更に loc. comp$f$ は，各点 $y \in Y$ に対し loc. com $f^{-1}y$ の最大値とする。

以上.

参考文献

1. Freudenthal, Neuaufbau der Endentheorie, Ann. of Math. 43 (1942) 261–279.

2. ――――――, Kompaktifizierungen und Bikompaktifizierungen, Indag. Math. 13 (1951), 184–192.

3. Groot, Topologische Studiën, Groningen. Noordhoff 1942.

4. ―――― and Nishiura, Inductive compactness as a generalization of semicompactness, Fund. Math. 58 (1966)

5 Morita, On bicompactifications of semibicompact spaces Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sect. A. 4 (1952), 222–229

6 Lelek, Dimension and Mappings of spaces with finite deficiency. Colloq. Math. 12 (1964) 221–227

7. ――――, Sur deux genres déspaces complets, Colloq. Math. 8 (1961)

8 ――――, On an estimate of the deficiency of a space Soviet Math. Dokl. 8 (1967). No. 5. 1308–1310

9 Skljarenko, Some questions in the theory of bicompactifications, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 58 (1966)

10 Smirnov, Dimension of increments of proximity spaces and of topological spaces, Soviet Math. Dokl. (1966) Tom 166, No. 3

11. Zippin. On semicompact spaces. Amer. Jour. of Math. 57 (1935), 327–341.

12 Nishiura. On the dimension of semi-compact spaces and their quasicomponents. Colloq. Math. 12 (1964), 7–10